Note parziali: Tutorato Analisi I - 22/11/23

Esercizio Calcolare $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+e^{\frac{1}{x}})\sin(x^7)}{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\sin^2(x)}-1-x^4}$

Soluzione

Osserviamo preliminarmente che

$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, quindi conviene

trattare separatamente i due casi

Caso $x \to 0^-$)

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\log(1+e^{\frac{1}{x}})\sin(x^7)}{\text{Denominatore}} = \lim_{x\to 0^-} \overbrace{\frac{\log(1+e^{\frac{1}{x}})}{e^{\frac{1}{x}}}}^{\to 1} \overbrace{\frac{\sin(x^7)}{x^7}}^{\to 1} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}}\, x^7}{\text{Denominatore}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}\, x^7}{\text{Denominatore}}$$

posso spezzare il limite del prodotto come il prodotto dei limiti

Trattiamo il denominatore ← vale anche per $x \to 0^+$

$$\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\sin^2(x)} = e^{\sin^2(x)\log\left(\frac{1}{1-x^2}\right)} = e^{\overbrace{-\sin^2(x)\log(1-x^2)}^{t\to 0}} = 1+t+o(t)$$

$$t = -\underbrace{\sin^2(x)}_{\sim x^2}\underbrace{\log(1-x^2)}_{\sim -x^2} = -(x^2+o(x^2))(-x^2+o(x^2)) = x^4+o(x^4)$$

asintoticam.: $\sim x^2$, $\sim -x^2$

- Sviluppando il denominatore fino all'ordine 4 si ottiene:

$$\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\sin^2(x)} - 1 - x^4 = 1+t+o(t)-1-x^4 =$$
$$= 1+x^4+\underbrace{o(x^4+o(x^4))}_{o(x^4)}-1-x^4 =$$
$$= o(x^4)$$

Troviamo ancora una forma indeterminata $\left(\dfrac{e^{1/x}\,x^7}{o(x^4)}\right)$ che non sappiamo gestire ⇝ sviluppiamo quindi a un ordine >4:

$$\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\sin^2(x)} = e^{\overbrace{-\sin^2(x)\log(1-x^2)}^{t}} = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$$

$$t = -\sin^2(x)\log(1-x^2) =$$

aumento l'ordine dello sviluppo

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 \left(x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)$$

$o(x^3)^2 + 2x\,o(x^3) + 2\frac{x^3}{3}o(x^3) = o(x^4)$

$$= \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36} + o(x^4)\right)\left(x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)$$

è $o(x^4)$

$$= \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)\left(x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) =$$

$$= x^4 + \frac{x^6}{2} - \frac{x^6}{3} + \frac{x^8}{6} + o(x^6) =$$

è $o(x^6)$

$$= x^4 + \underbrace{\frac{x^6}{6} + o(x^6)}$$

è ancora $o(x^4)$, ma adesso abbiamo una stima "più accurata"

$$t^2 = \left(x^4 + \frac{x^6}{6} + o(x^6)\right)^2 = \left(x^4\left(\underbrace{1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}_{\to 1}\right)\right)^2 = x^8(\cdots) = o(x^6)$$

$$o(t^2) = o(o(x^6)) = o(x^6)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\sin^2(x)} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) =$$

$$= 1 + x^4 + \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

$$\text{Denominatore} = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\sin^2(x)} - 1 - x^4 = \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

Domanda: Potevamo fermarci a $e^t = 1 + t + o(t)$ e sviluppare t fino all'ordine 6 come appena fatto? NO

Perché $t = x^4 + \frac{x^6}{6} + o(x^6) \Rightarrow o(t) = o(x^4)$

e quindi avremmo un denominatore sviluppato all'ordine 4

$o(x^4)$ "mangia" tutti i termini x^6, $o(x^6)$ ...

Concludiamo:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}\, x^7}{x^6/6 + o(x^6)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}\, x^{\cancel{7}}}{\cancel{x^6}\left(\underbrace{\frac{1}{6} + \frac{o(x^6)}{x^6}}_{\text{non tende a } 0,\ \text{buono!}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{e^{1/x}}^{\to 0} \cdot \overbrace{x}^{\to 0}}{\frac{1}{6} + \underbrace{o(x^6)/x^6}_{\to 0}} = 0.$$

Caso $x \to 0^+$)

come prima $\frac{\sin(x^7)}{x^7}\, x^7$ e spezzo il limite del prodotto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)\sin(x^7)}{\text{Denominatore}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log\left(1 + e^{1/x}\right) x^7}{\text{Denominatore}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\log\left(1 + e^{1/x}\right) x^7}{\frac{x^6}{6} + o(x^6)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\log\left(1 + e^{1/x}\right)}^{\to +\infty} \cdot \overbrace{x}^{\to 0}}{\frac{1}{6} + \underbrace{o(1)}_{= o(x^6)/x^6 \to 0}}$$

lo sviluppo precedente era valido anche per $x \to 0^+$

Quindi è sufficiente calcolare il limite al numeratore:

$$\lim_{x\to 0^+} \log\left(1+e^{1/x}\right) x = \quad y = \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{\log(1+e^{y})}{y} \overset{\circledast}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{\log[e^{y}(1+e^{-y})]}{y} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{\log e^{y} + \log(1+e^{-y})}{y} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{y+\log(1+e^{-y})}{y} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \Big(1 + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{y}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\log(\underbrace{1+\underbrace{e^{-y}}_{\to 0}}_{\to 1})}_{\to 0}}_{\to 0} \Big) = 1$$

$\circledast$ Più velocemente: STIME ASINTOTICHE

$$e^{y}+1 \sim e^{y} \quad \text{per } y\to+\infty$$

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\log(e^{y}+1)}{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\log e^{y}}{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{y} = 1$$

Quindi in conclusione

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log\left(1+e^{1/x}\right)\sin(x^3)}{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\sin^2(x)} - 1 - x^4} = \frac{\lim_{x\to 0^+} \log\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right) x}{\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{6} + o(1)\right)} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6.$$

In particolare il $\lim_{x\to 0}$ NON ESISTE $\begin{cases} 6 & \text{se } x\to 0^+ \\ 0 & \text{se } x\to 0^- \end{cases}$